11 décembre - Mathieu Plancke

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $s_n = \sum_{k=1, pgcd(k,n)=1}^{n} k$ et $t_n = \sum_{k=1, pgcd(k,n)\neq 1}^{n} k$. Tout d'abord, on remarque que $\varphi(n)$ (l'indicatrice d'Euler) est paire pour tout $n > 2$. Dans s_n, il y a exactement $\varphi(n)$ termes. On remarque ensuite que si $m \in [\![1;n]\!]$ est premier avec n, alors $n - m$ l'est aussi. En effet, $pgcd(n,m) = pgcd(n, n-m) = 1$ par l'algorithme d'Euclide. De plus tant que $n > 2$, on a jamais $m = n - m$, car sinon on aurait $2m \equiv 0 \pmod n$ et donc $2 \equiv 0 \pmod n$ car m est inversible modulo n. Ainsi, dans s_n on aura, avec $m_1, ..., m_{\varphi(n)}$ les entiers premiers avec n

$$s_n = m_1 + n - m_1 + ... + m_{\frac{\varphi(n)}{2}} + n - m_{\frac{\varphi(n)}{2}} = \frac{\varphi(n)}{2} n \equiv 0 \pmod n$$

Ensuite, on a aussi

$$s_n + t_n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Au final,

$$s_n - t_n \equiv -t_n \equiv -\frac{n(n+1)}{2} \pmod n$$

Ainsi, si n est pair,

$$s_n - t_n \equiv -\frac{n}{2} \neq 0 \pmod n$$

Si n est impair,

$$s_n - t_n \equiv n\frac{n+1}{2} \equiv 0 \pmod n$$

Il nous reste à traiter les cas $n = 1$ et $n = 2$: $s_1 = 1$ et $t_1 = 0$, $s_2 = 1$ et $t_2 = 2$ En conclusion, $n \mid s_n - t_n$ si et seulement si n est impair